思考力問題 式の計算

例題1

最初に1番目と2番目の数をある自然数に決め，3番目は1番目と2番目の数の和，4番目は2番目と3番目の数の和，…のように n 番目 $(n \geqq 3)$ の数を $(n-2)$ 番目と $(n-1)$ 番目の数の和と定める。

1番目の数が1，2番目の数が2の場合は，右のようになる。

1番目	2番目	3番目	4番目	5番目	…
1	2	3	5	8	…

次の問いに答えなさい。

(1) 1番目の数が1，2番目の数が2の場合，8番目の数を求めなさい。

(2) 1番目の数が3の場合，2番目の数がどのような数であっても8番目の数を13でわった余りはかならず $\boxed{}$ になる。$\boxed{}$ にあてはまる数を答えなさい。また，そのわけを説明しなさい。

・数の性質や規則性について，文字を使って説明しよう。
⇒文字を使って数量を表し，目的に合わせて式を変形する。

(例)
・$5(\boxed{})+2$…5でわると2余る
・$10(\boxed{})+3$…一の位が3

解答 (1) 上の表を続けて，6番目は $\boxed{①}$，7番目は $\boxed{②}$，8番目は $\boxed{③}$ である。

(2) 2番目の数を n とする。このとき，1番目から順に8番目までの数は，次のようになる。

$3,\ n,\ n+3,\ 2n+3,\ 3n+6,\ 5n+9,\ \boxed{④},\ \boxed{⑤}$

8番目の数を13でわるから，$\boxed{⑤}=13(n+1)+\boxed{⑥}$

よって，8番目の数を13でわった余りはかならず $\boxed{⑥}$ になる。

問題1 図1のように□を並べ，線で結ぶ。1段目の3つのそれぞれの□には，数や式を書き，2段目以降のそれぞれの□には，線で結ばれた上の段の2つの□に書かれた数や式の和を書くものとする。例えば，図2のように，1段目の3つの□に，左から順に，1，4，3を書くと，3段目の□には，12を書くことになる。次の問いに答えなさい。

図1

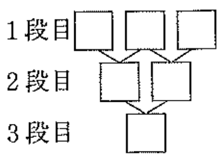
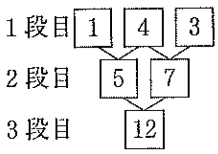


図2

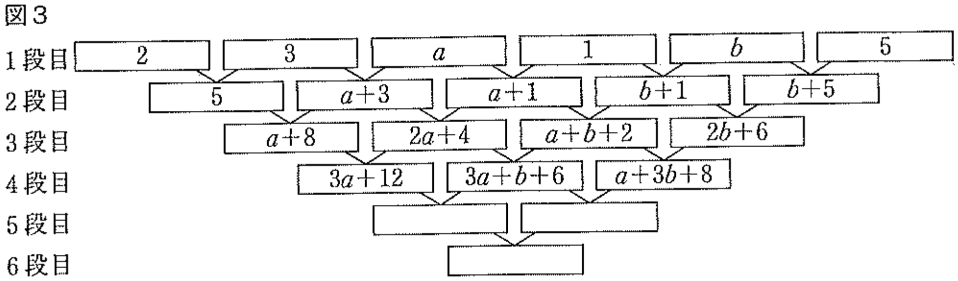


〈山口改〉

□(1) 図1の1段目の3つの□に，左から順に，8，x，5を書く。3段目の□に書く式の値が27となるとき，x の値を求めなさい。

□(2) 1段目に並べる□の個数を6つに増やす。a を自然数，b を2以上の偶数として，1段目の6つの□に，左から順に，2，3，a，1，b，5を書く。このとき，4段目までには，図3のように，数や式を書くことになる。図3中の，6段目の $\boxed{}$ に書く式を，a，b を使って表しなさい。また，この式の値の一の位の数は，いつも同じ数になることを説明しなさい。

図3



例題2

図1のような，2つの円錐Ⅰ，Ⅱを組み合わせた立体がある。図2はこの立体の展開図で，円錐Ⅰの展開図にあたるおうぎ形の半径を a cm，中心角を $b°$，円錐Ⅱの展開図にあたるおうぎ形の半径を x cm，中心角を $y°$ とする。次の問いに答えなさい。

(1) y を a，b，x を使った式で表しなさい。

(2) x の値が大きくなると，y の値はどのように変化するか。簡単に説明しなさい。

図1

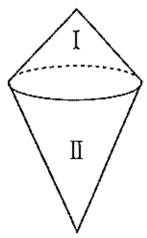
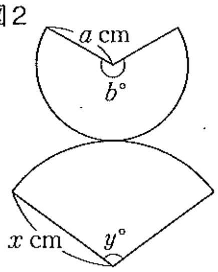


図2



・問題文に示された条件から，数量の関係を表す式をつくろう。
⇒等しい数量を見つけて等式にする。円錐の展開図で，おうぎ形の弧はどこと等しくなるか？

解答 (1) 円錐Ⅰ，Ⅱの展開図にあたるおうぎ形の弧の長さは等しいから，

$$2\pi\times\boxed{\text{①}}\times\frac{\boxed{\text{②}}}{360}=2\pi\times x\times\frac{y}{360}\qquad xy=\boxed{\text{③}}\qquad y=\frac{\boxed{\text{③}}}{x}$$

(2) (1)より，y は x に $\boxed{\text{④}}$ する。よって，
x の値が大きくなると，y の値は $\boxed{\text{⑤}}$ なる。

問題2 図1のようなコップを，図2のように，平面上の点Sとコップの点Aが重なるように倒して，すべらないように転がしたところ，コップの端が点Oを中心とする円の円周である点線に沿って動きながら1周した。点Tは，コップが1回転したときに，点Aが重なる点である。図3は図1のコップを真正面から見た図で，線分PQは線分ADと線分BCの垂直二等分線となり，線分ADは線分BCより長い。

図1

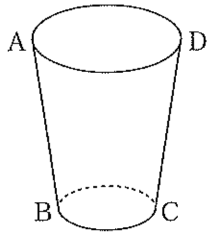


図2

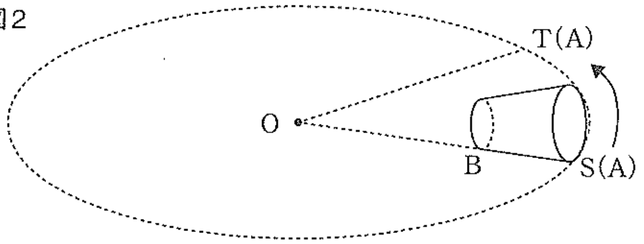


図3

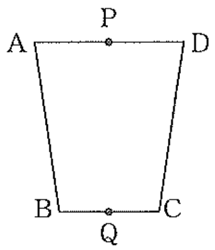


図3のコップについて，線分ADの長さが9 cm，線分BCの長さが6 cmで，線分ABの長さがちがう3つのコップをそれぞれ，図2のように，すべらないように転がし，円を1周するときのコップの回転数を調べ，その結果をまとめると右の表のようになった。次の問いに答えなさい。

表

	コップ①	コップ②	コップ③
線分ABの長さ(cm)	10.5	13.5	16.5
コップの回転数(回転)	7	9	11

〈滋賀改〉

□(1) コップ③を図2のように，すべらないように転がしたときの半径OAの長さを r cmとして，r の値を求めなさい。

□(2) コップ②を図2のように1回転させたときの，∠SOTの大きさを求めなさい。

□(3) 図3のコップについて，線分ADの長さを a cm，線分BCの長さを b cm，線分ABの長さを x cm，円を1周するときのコップの回転数を m 回転として，a，b，x，m の関係を式で表しなさい。また，その式になる理由を a，b，x，m の文字を用いて説明しなさい。

第1章・思考力問題

➡p.34

例題1　① 13　② 21　③ 34
④ $8n+15$　⑤ $13n+24$　⑥ 11

問題1　(1)　$x=7$

(2)　式…$10a+5b+32$

説明…(例)　b は偶数だから，n を整数として，$b=2n$ と表すことができる。

$10a+5b+32$
$=10a+5\times 2n+32$
$=10(a+n+3)+2$

$a+n+3$ は整数だから，$10(a+n+3)$ は10の倍数である。よって，この式の値の一の位の数は，いつも2である。

解説

例題1　(1)　次のように，順番に数をつくる。

1番目	1
2番目	2
3番目	1+2=3
4番目	2+3=5
5番目	3+5=8
6番目	5+8=13
7番目	8+13=21
8番目	13+21=34
…	…

参考　このようにしてつくった数の並び(数列)を，フィボナッチ数列という。フィボナッチは，13世紀のイタリアの数学者である。

(2)　$n+1$ は整数だから，$13(n+1)$ は13でわり切れる数である。よって，$13(n+1)+11$ を13でわった余りは11である。

参考　わり算の商と余りについて，次の関係が成り立つ。余りはわる数より小さく，

(わられる数)=(わる数)×(商)+(余り)

問題1　(1)　次のようになる。

1段目　8　x　5
2段目　$x+8$　$x+5$
3段目　$2x+13$

よって，$2x+13=27$　　$x=7$

(2)　整数を10でわった余りは，一の位の数に等しい。

➡p.35

例題2　① a　② b　③ ab　④ 反比例
⑤ 小さく

問題2　(1)　$r=49.5$　　(2)　40°

(3)　式…$x=\dfrac{m(a-b)}{2}$

説明…(例)　図2で，OAを半径とする円をコップが1周するとき，線分ADを直径とする円が m 回転するから，

$$2\pi\times\mathrm{OA}=a\pi\times m \qquad \mathrm{OA}=\frac{am}{2}$$

同様に，OBを半径とする円をコップが1周するとき，線分BCを直径とする円が m 回転するから，

$$2\pi\times\mathrm{OB}=b\pi\times m \qquad \mathrm{OB}=\frac{bm}{2}$$

よって，

$$x=\mathrm{OA}-\mathrm{OB}=\frac{am}{2}-\frac{bm}{2}=\frac{m(a-b)}{2}$$

解説

問題2　(1)　図2で，OAを半径とする円をコップが1周するとき，線分ADを直径とする円が11回転するから，$2\pi\times r=9\pi\times 11$　　$r=\dfrac{99}{2}=49.5$

別解　図2で，OA，OBを半径とする円を，それぞれAD(=9 cm)，BC(=6 cm)を直径とする円が，同じ数だけ回転するから，

$$\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=9:6=3:2 \qquad \mathrm{OB}=\frac{2}{3}\mathrm{OA}$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{OA}-\mathrm{OB}=\frac{1}{3}\mathrm{OA}$$

コップ③は，AB=16.5だから，

OA=3AB=49.5(cm)

(2)　コップ②は，円Oを1周する間に9回転する。1周するときに，円Oの中心Oのまわりを動く角は360°だから，1回転で動く角は，360°÷9=40°

別解　(1)の別解より，コップ②について，

OA=13.5×3=40.5(cm)

∠SOT=x°とする。おうぎ形の弧の長さは，ADを直径とする円の円周に等しいから，

$$2\pi\times 40.5\times\frac{x}{360}=9\pi \qquad x=40$$

(3)　$a=9$，$b=6$ のとき，

コップ①は，$m=7$ だから，$x=\dfrac{7\times(9-6)}{2}=10.5$

コップ②，③も，同様に計算できる。