3-6 相似な図形〈学習編〉

1 相似な図形

チェック!

相似(そうじ)…2つの図形について，一方を拡大または縮小するともう一方の図形と合同になるとき，2つの図形は相似であるといいます。
△ABCと△DEFが相似であることは，記号∽を用いて
△ABC∽△DEF と表されます。

相似な図形の性質…
相似な2つの図形で，対応する角の大きさはそれぞれ等しくなります。また，対応する線分の長さの比はすべて等しく，これを**相似比**といいます。

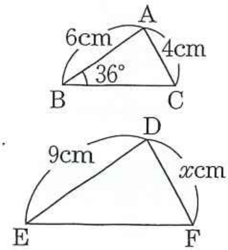
例1　右の図において，△ABC∽△DEFのとき，
対応する角の大きさは等しいから，
∠DEF＝∠ABC＝36°
です。
また，対応する辺の長さの比は等しいから，
AB：DE＝AC：DF

$6:9=4:x$

$6x=36$ ←$a:b=c:d$ ならば，$ad=bc$

$x=6$

よって，DF＝6cmとなります。



テスト　例1の△ABCと△DEFについて，次の問いに答えなさい。
(1)　∠ACB＝70°のとき，∠FDEの大きさは何度ですか。
(2)　△ABCと△DEFの相似比を求めなさい。

答え　(1)　74°　　(2)　2：3

2 三角形の相似条件

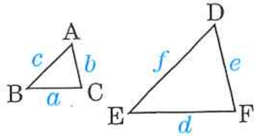
☑チェック!

三角形の相似条件…

2つの三角形は，次の条件のうち，いずれかが成り立つとき，相似になります。

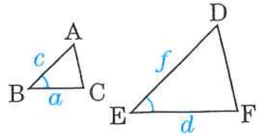
① 3組の辺の比がすべて等しい。

$a:d=b:e=c:f$



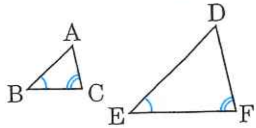
② 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。

$a:d=c:f$，$\angle B=\angle E$



③ 2組の角がそれぞれ等しい。

$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$



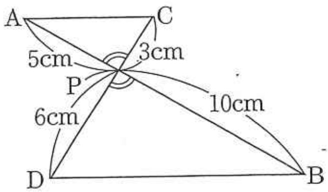
例1　右の図のように，2つの線分 AB，CD が点 P で交わっているとき，△PAC と△PBD で，

$PA:PB=PC:PD=1:2$ …①

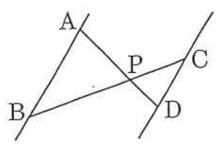
また，対頂角は等しいから，

$\angle APC=\angle BPD$ …②

①，②より，2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから，△PAC∽△PBD となります。△PAC と△PBD の相似比は，1：2です。



テスト　右の図で，AB // CD のとき，相似な三角形を，記号∽を用いて表しなさい。また，そのとき用いる相似条件を答えなさい。



答え　△ABP∽△DCP，2組の角がそれぞれ等しい。

3 相似な図形の面積比と体積比

☑チェック!

相似な図形の面積比…

2つの図形が相似で，その相似比が $m:n$ のとき，面積比は $m^2:n^2$ となります。

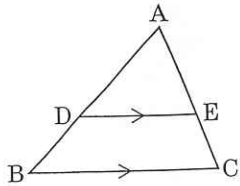
相似な立体の表面積比，体積比…

2つの立体が相似で，その相似比が $m:n$ のとき，表面積比は $m^2:n^2$，体積比は $m^3:n^3$ となります。

例１　2つの円は相似なので，半径3cmの円と半径4cmの円の面積比は，$3^2:4^2=9:16$ です。

4 平行線と比

☑チェック!



三角形と比…

△ABCの辺AB，AC上にそれぞれ点D，Eがあるとき，次の①，②が成り立ちます。

① DE//BC ならば，
　AD：AB＝AE：AC＝DE：BC

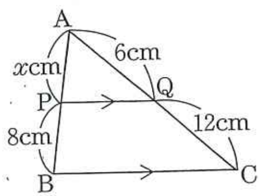
② DE//BC ならば，AD：DB＝AE：EC

三角形と比の定理の逆…△ABCの辺AB，AC上にそれぞれ点D，Eがあるとき，次の①，②が成り立ちます。

① AD：AB＝AE：AC ならば，DE//BC

② AD：DB＝AE：EC ならば，DE//BC

例１　右の図で，PQ//BCのとき，
　AP：PB＝AQ：QCより，AP：8＝6：12
　よって，AP＝4cmとなります。

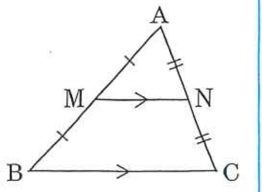


チェック!

中点連結定理…△ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると，次の①，②が成り立ちます。

① $MN /\!/ BC$

② $MN=\frac{1}{2}BC$

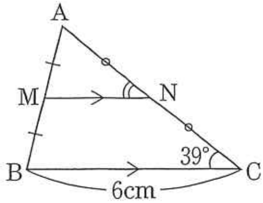


例１　右の図で，点 M，N がそれぞれ辺 AB，AC の中点のとき，中点連結定理より $MN /\!/ BC$ となるから，

$MN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 6=3$(cm)

また，同位角が等しいので，

$\angle ANM=\angle ACB=39^\circ$

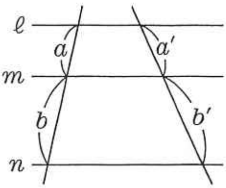


チェック!

平行線と比…右の図で，$\ell /\!/ m /\!/ n$ のとき，次の①，②が成り立ちます。

① $a:b=a':b'$

② $a:a'=b:b'$

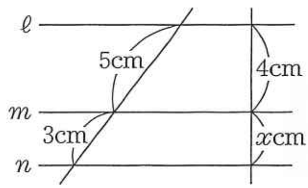


例１　右の図で，$\ell /\!/ m /\!/ n$ のとき，線分の長さについて，

$5:3=4:x$

$5x=12$

よって，$x=\frac{12}{5}$です。

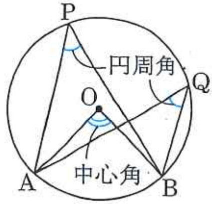


第3章 図形に関する問題

3-7 円

☑チェック！

円周角…円の$\overset{\frown}{AB}$を除く円周上に点Pがあるとき，∠APBを$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角といいます。右の図では，∠AQBも$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角です。



円周角の定理…1つの弧に対する円周角の大きさは一定で，その弧に対する中心角の大きさの半分です。

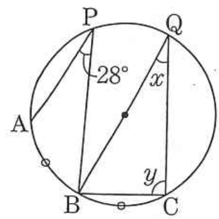
弧と円周角…

① 1つの円において，等しい弧に対する円周角は等しくなります。

② 1つの円において，等しい円周角に対する弧は等しくなります。

直径と円周角…半円の弧に対する円周角の大きさは90°です。

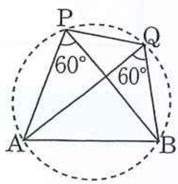
例1　右の図で，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$のとき，
∠x=∠APB=28°です。また，
BQが円の直径のとき，
∠y=90°です。



☑チェック！

円周角の定理の逆…2点P，Qが直線ABに対して同じ側にあるとき，∠APB=∠AQBならば，4点A，B，P，Qは1つの円周上にあります。

例1　右の図で，2点P，Qは直線ABに対して同じ側にあり，∠APB=∠AQB=60°なので，4点A，B，P，Qは1つの円周上にあります。



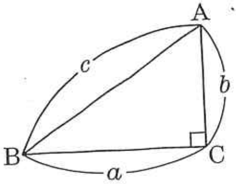
3-8 三平方の定理

1 三平方の定理

チェック!

三平方の定理…直角三角形において，直角をはさむ２辺の長さを a，b，斜辺（しゃへん）の長さを c とすると，次の式が成り立ちます。

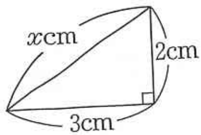
$a^2+b^2=c^2$



例１　右の図の直角三角形で，三平方の定理より，

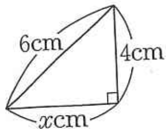
$x^2=3^2+2^2=13$ だから，$x=\pm\sqrt{13}$

$x>0$ より，$x=\sqrt{13}$ となります。



テスト　右の図の直角三角形で，x の値（あたい）を求めなさい。

答え　$x=2\sqrt{5}$



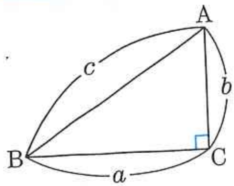
チェック!

三平方の定理の逆…

△ABC の３辺の長さ a，b，c の間に

$a^2+b^2=c^2$ という関係が成り立つならば，

△ABC は∠C＝90° の直角三角形です。



例１　３辺の長さが 5cm，12cm，13cm の三角形は，$a=5$，$b=12$，$c=13$ とすると，$a^2+b^2=5^2+12^2=169$，$c^2=13^2=169$ より，$a^2+b^2=c^2$ という関係が成り立つので，直角三角形です。

例２　３辺の長さが 6cm，7cm，9cm の三角形は，$a=6$，$b=7$，$c=9$ とすると，$a^2+b^2=6^2+7^2=85$，$c^2=9^2=81$ より，$a^2+b^2=c^2$ という関係が成り立たないので，直角三角形ではありません。

2 三平方の定理の利用

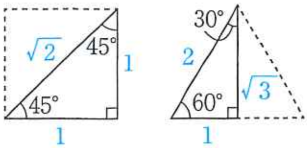
☑ チェック!

いろいろな長さを求めること

図形の中に直角三角形をつくると，三平方の定理を利用して，いろいろな長さや距離を求めることができます。たとえば，正三角形の中に直角三角形をつくることで正三角形の高さを求めたり，正方形の中に直角三角形をつくることで正方形の対角線の長さを求めたりすることができます。

特別な直角三角形の 3 辺の長さの比

3 つの角が 90°，45°，45° である直角三角形と，90°，60°，30° である直角三角形の 3 辺の長さの比は，それぞれ右の図のようになります。



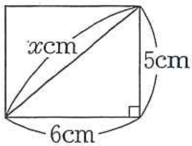
例 1　縦 5cm，横 6cm の長方形の対角線の長さ $x$cm

$x^2=6^2+5^2$

$=61$

$x=\pm\sqrt{61}$

$x>0$ より，$x=\sqrt{61}$



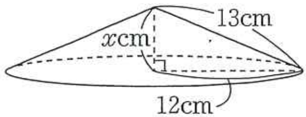
例 2　底面の半径が 12cm，母線の長さが 13cm である円錐の高さ $x$cm

$12^2+x^2=13^2$

$x^2=25$

$x=\pm5$

$x>0$ より，$x=5$



例 3　原点 O と点 A(10，5)との距離 OA

$\mathrm{OA}^2=10^2+5^2$

$=125$

$\mathrm{OA}=\pm5\sqrt{5}$

$\mathrm{OA}>0$ より，$\mathrm{OA}=5\sqrt{5}$